DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.06.010

探讨树的 (k,d) − 边魔幻全标号*

赵喜杨，姚　兵
（西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要： 研究了树的 (k,d) − 集有序优美标号和 (k,d) − 超级集有序边魔幻全标号。通过连接顶点个数较小的 (k,d) − 集有序优美树的方式，利用可算法化的构造性证明可得到具有较大顶点数目的 (k,d) − 边魔幻全标号的树，建立了 (k,d) − 集有序优美标号和 (k,d) − 边魔幻全标号之间的联系。

关键词： 优美标号；(k,d) − 优美标号；边魔幻全标号；(k,d) − 边魔幻全标号

中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2016）06－0067－07

Probing (k,d)- edge magic total labellings of trees

ZHAO Xiyang, *YAO Bing*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The (k,d)- edge magic property of trees is studied. By using the connection between (k,d)-graceful labellings and (k,d)- edge magic total labellings for generating large classes of (k,d)- edge magic total trees from smaller graceful trees, the relationship between (k,d)- graceful labellings and (k,d)-edge magic labellings is established.

Key words: graceful labellings; (k,d)- graceful labellings; edge magic total labelling; (k,d)- edge magic total labelling

1963 年，Ringel 猜测：对预先给定的具有 $n+1$ 个顶点的树，每一个 $2n+1$ 个顶点的完全图 K_{2n+1} 可以被分解为 $2n+1$ 棵树，使得这些树均同构于预先给定的树。在研究 Ringel 猜想的过程中，Rosa 发现：如果所有的树都是优美树，则 Ring 猜想成立。然而，Rosa 的优美树猜想至今没有被证明或否定，使得这个猜想至今仍是一个吸引人的困难问题。对于数学猜想的进攻，导致图的着色和标号迅速发展成为当今图论学科中十分活跃的分支，图的优美标号也成为目前图论研究的一个热点问题[1-12]，他们在编码理论、通讯网络、物流等方面均有着重要的应用。在此基础上发展出了奇优美标号、魔幻标号、幸福标号、(k,d) − 优美标号、(k,d) − 边魔幻全标号等十多种标号[7-13]。

1　概　念

记号 $[m, n]$ 表示一个非负整数集 $\{m, m+1, m+2, \cdots, n\}$，其中 m 和 n 均为整数，且满足 $0 \leqslant m < n$；记号 $[m, m+nd]$ d 表示非负整数集 $\{m, m+d, m+2d, \cdots, m+nd\}$，其中 m，n，d 均为非负整数；把度数为 1 的顶点称为叶子。文中所考虑的图均为有限、无向、简单图，图 G 的顶点个数记为 $|V(G)|$，一个 (p, q) − 图 G 具有 p 个顶点和 q 条边。本文没有定义的术语和符号均采用于文献[1-3]。由于 (k,d) − 边魔幻全标号的结论甚少，本文将利用规模较小的具有 (k,d) − 边魔幻全标号的树来构造较大规模的具有 (k,d) − 边魔幻全标号的树。而且，我们的构造方法可以转化为多项式的

* **收稿日期：** 2016－01－11
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（61163054，61363060，61662066）
作者简介： 赵喜杨（1990 年生），女；**研究方向：** 图的标号及染色；**通讯作者：** 姚兵；E-mail：yybb918@163.com

算法。下面给出本文要用到的几个标号定义。

定义 1[10,12] 对于给定的(p, q)－图G，如果存在一个单射f: $V(G) \to [0, q]$，使得边标号集合$\{f(uv) = |f(u) - f(v)| : uv \in E(G)\} = [1, q]$，则称$f$是$G$的一个优美标号，也称$G$为优美图。此外，若$G$是具有顶点二部划分$(X, Y)$的二分图，且$f$满足$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$（以下简记为$f(X) < f(Y)$），则称$f$是$G$的一个集有序优美标号。

以下顶点标号集合$\{f(u) \mid u \in V(G)\}$简记为$f(V(G))$，边标号集合$\{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$简记为$f(E(G))$。

定义 2[10,12] 如果(p,q)－图G有一个映射f:$V(G) \to [0,k + (q-1)d]$，使得G的任何2个顶点x，y满足$f(x) \neq f(y)$，且定义每条边uv的标号为$f(uv) = |f(u) - f(v)|$，当$f(E(G)) = \{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = \{k, k+d, k+2d, \cdots, k+(q-1)d\}$ $(k, d \geqslant 1)$时，则称f是(p, q)－图G的一个(k,d)－优美标号，也称G为(k,d)－优美图。此外，若G是具有顶点二部划分(X, Y)的偶图，且f满足$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$，则称$f$是$G$的一个$(k,d)$－集有序优美标号。

定义 3[10] 设G是(p, q)－图。若存在常数λ和双射f: $V(G) \cup E(G) \to [1, p+q]$，使对$G$的任意一条边$uv \in E$，总有$f(u) + f(v) + f(uv) = \lambda$，则称$f$为图$G$的一个边魔幻全标号，$\lambda$为魔幻常数。此外，若$G$是具有顶点二部划分$(X, Y)$的偶图，且$f$满足$f(X \cup Y) = [1, p]$和$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$，则称$f$是$G$的一个超级集有序边魔幻全标号。

定义 4[10] 设G是(p, q)－图。若存在常数λ和双射f: $V(G) \cup E(G) \to \{d, 2d, \cdots, \mu d, k+(\mu+1)d, k+(p+q-1)d\}$，$\mu \in [1, p+q-1]$，使对$G$的任意一条边$uv \in E$，总有$f(u) + f(v) + f(uv) = \lambda$，则称$f$为图$G$的一个$(k,d)$－边魔幻全标号，$\lambda$为魔幻常数。此外，若树$G$是具有顶点二部划分$(X, Y)$的偶图，且$f$满足$f(X) = \{d, 2d, \cdots, |X|d\}$，$f(Y) = \{k+|X|d, k+(|X|+1)d, \cdots, k+(|X|+|Y|-1)d\}$，则称$f$是$G$的一个$(k,d)$－超级集有序边魔幻全标号。

定义 5 设H_1，H_2，$\cdots$，$H_{|V(T)|}$和T是树，$V(T) = \{u_i \mid i \in [1, |V(T)|]\}$。对每一个$i \in [1, |V(T)|]$，将$T$的一个顶点$u_i$与树$H_i$中的一个顶点重合，得到的图$G$叫做复合图，记为$G = \langle H_1, H_2, \cdots, H_{|V(T)|} \rangle$。若$|V(H_1)| = |V(H_2)| = \cdots = |V(H_{|V(T)|})|$，则称$G$为对称树。若$V(H_1) = V(H_2) = \cdots = V(H_{|V(T)|})$，则称$G$为一致对称树，特记作$(T, H)$。

2 主要结论

引理 1 一棵树是(k,d)－集有序优美的充要条件是它具有(k,d)－超级集有序边魔幻全标号。

证明 设n个顶点的树T的顶点集二部划分为(X, Y)，这里$X = \{x_i \mid i \in [1, s]\}$和$Y = \{y_i \mid i \in [1, t]\}$，$s + t = n$。

必要性 设树T有一个(k,d)－集有序优美标号f，使得

$$f(x_i) = (i-1)d, i \in [1, s];$$
$$f(y_j) = k + (s+j-2)d, j \in [1, t];$$

对边$x_iy_j \in E(T)$，有

$$f(x_iy_j) = f(y_j) - f(x_i) = k + (s+j-i-1)d$$

注意到，$f(V(T)) = [0, (s-1)d]^d \cup [k+(s-1)d, k+(n-2)d]^d$和$f(E(T)) = [k, k+(n-2)d]^d$。利用$f$作$T$的另一个标号$g$如下：

$$g(x_i) = f(x_i) + d, i \in [1, s];$$
$$g(y_j) = f(y_{t-j+1}) + d, j \in [1, t];$$

对边$x_iy_j \in E(T)$，令$g(x_iy_j) = nd + f(x_iy_j)$

易知$g(x_i) \in [d, sd]^d$，$g(y_j) \in [k+sd, k+(s+t-1)d]^d$和$g(x_iy_j) \in [nd+k, k+(2n-2)d]^d$。进一步，得到

$$g(x_i) + g(x_iy_j) + g(y_j) =$$
$$f(x_i) + d + nd + f(x_iy_j) + f(y_{t-j+1}) + d =$$
$$id + nd + k + (s+j-i-1)d + k +$$
$$(s+t-j+1-2)d + d = 2k + (2n+s-1)d$$

所以，标号g是树T的一个(k,d)－超级集有序边魔幻全标号。

充分性 设树T有一个超级集有序边魔幻全标号h，使得$h(x_i) = id$，$i \in [1, s]$，$h(y_j) = k + (n-j)d$，$j \in [1, t]$，以及$h(x_iy_j) = k + (2n-t-j-i-1)d$。注意到$h(V(T)) = [d, sd]^d \cup [k+sd, k+(s+t-1)d]^d$，$h(E(T)) = [nd+k, k+(2n-2)d]^d$，且$h(x_i) + h(x_iy_j) + h(y_j) = 2k + (3n-t-1)d$。利用$h$作$T$的一个标号$\alpha$如下：

$$\alpha(x_i) = h(x_i) - d, i \in [1, s];$$
$$\alpha(y_j) = h(y_{t-j+1}) - d, j \in [1, t];$$
$$\alpha(x_iy_j) = h(x_iy_j) - nd$$

由于，

$$\alpha(y_j) - \alpha(x_i) = h(y_{t-j+1}) -$$
$$d(-h(x_i) - d) = h(y_{t-j+1}) - h(x_i) =$$

$$k+(n-t+j-i-1)d=h(x_iy_j)-nd=\alpha(x_iy_j),$$
$$\alpha(x_i)\in[0,(s-1)d]^d,$$
$$\alpha(y_j)\in[k+(s-1)d,k+(n-2)d]^d,$$
$$\alpha(x_iy_j)\in[k,k+(n-2)d]^d$$

故

$$\alpha(V(T))=[0,(s-1)d]^d\cup[k+(s-1)d,k+(n-2)d]^d,$$
$$\alpha(E(T))=[k,k+(n-2)d]^d$$

以上论证说明，标号 α 是树 T 的一个 (k,d) - 集有序优美标号，如图 1 所示。

定理 1　$T_1,T_2,\cdots,T_m$ 为 (k,d) - 集有序优美树。则存在顶点 $u_i\in V(T_i)$ $(i\in[1,m])$，使得用边连接顶点 u_j 与顶点 $u_{j+1}(j\in[1,m-1])$ 后得到的树 H 具有 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号。

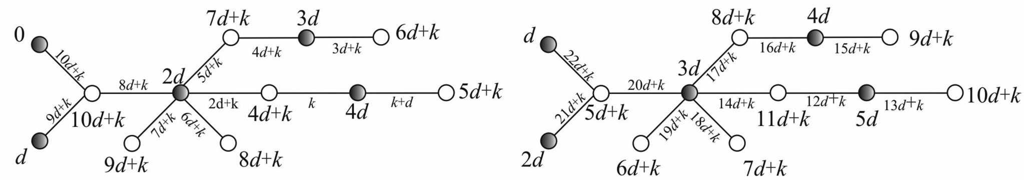

图 1　(k,d) - 集有序优美标号和 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号

Fig. 1　A set-ordered (k,d)- graceful labelling, and a super set-ordered (k,d)- edge magic total labelling

证明　对 $l\in[1,m]$，设 T_l 是 n_l 个顶点的 (k, d) - 集有序优美树，其顶点集合二部划分 (X_l,Y_l) 满足 $X_l=\{x_{l,i}\mid i\in[1,s_l]\}$ 和 $Y_l=\{y_{l,j}\mid j\in[1,t_l]\}$，这里 $s_l+t_l=n_l$。由引理 1，树 $T_l(l\in[1,m])$ 有一个 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号 g_l，使当 $i\in[1,s_l]$ 和 $j\in[1,t_l]$，有

$$g_l(x_{l,i})=id,\ g_l(x_{l,i}y_{l,j})=l+(n_l+s_l+j-i-1)d,$$
$$g_l(y_{l,j})=l+(n_ld-j)d$$

以及

$$g_l(x_{l,i})+g_l(x_{l,i}y_{l,j})+g_l(y_{l,j})=2l+(2n_l+s_l-1)d$$

对 $l\in[1,m-1]$，用边将树 T_l 的顶点 $y_{l,1}$ 与树 $T_{l+}1$ 的顶点 $x_{l+1,1}$ 连接在一起，就得到本定理所要求的树 H。利用上述 m 个超级集有序边魔幻全标号 $g_l(l\in[1,m])$，给树 H 定义一个标号 g 如下：

(**i**) 对 $l\in[1,m]$，令 $g(x_{l,i})=g_l(x_{l,i})+d\sum_{l=1}^{l-1}s_l$，$l\in[1,m]$，$i\in[1,s_l]$，其中 $x_{l,i}\in X_l\subset V(T_l)$；

(**ii**) 对 $l\in[1,m]$，令 $g(y_{l,j})=g_l(y_{l,j})+d\sum_{l=1}^{l-1}n_l+d\sum_{l=l+1}^{m}s_l$，$l\in[1,m]$，$j\in[1,t_l]$，其中 $y_{l,j}\in Y_l\subset V(T_l)$；

(**iii**) 对边 $x_{l,i}y_{l,j}\in E(T_l)$，令 $g(x_{l,i}y_{l,j})=g_l(x_{l,i}y_{l,j})+d\cdot\left(\sum_{r=1}^{m}n_r+\sum_{l=l+1}^{m}n_l-n_l\right)$；

(**iv**) 对 $l\in[1,m-1]$，T_l 与 T_{l+1} 之间的连边 $x_{l+1,1}y_{l,1}$ 的边标号为

$$g(x_{l+1,1}y_{l,1})=k+\left(2\sum_{r=1}^{m}n_r-\sum_{l=1}^{l}n_l-1\right)d,\quad l\in[1,m-1]$$

不难验证，

$$g(x_{l,i})\in\left[d,d\sum_{i=1}^{m}s_i\right]^d,\ l\in[1,m],\ i\in[1,s_l];$$
$$g(y_{l,j})\in\left[k+d\sum_{j=1}^{m}s_j,k+d(M-1)\right]^d,$$
$$l\in[1,m],\ j\in[1,t_l]$$

以及

$$g(E(H))=[k+Md,k+2Md-2d]^d,$$
$$g(V(H))=\left[d,d\sum_{j=1}^{m}s_j\right]^d\cup\left[k+d\sum_{j=1}^{m}s_j,k+d(M-1)\right]^d$$

其中 $M=\sum_{l=1}^{m}n_l$。对边 $x_{l,i}y_{l,j}\in T_l\subset E(H)$ $(l\in[1,m])$，可得

$$g(x_{l,i})+g(x_{l,i}y_{l,j})+g(y_{l,j})=$$
$$g_l(x_{l,i})+d\sum_{l=1}^{l-1}s_l+g_l(x_{l,i}y_{l,j})+$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m}n_r+\sum_{l=l=1}^{m}n_l-n_l\right)d+g_l(y_{l,j})+$$
$$d\sum_{l=1}^{l-1}n_l\sum_{l=l+1}^{m}s_l+d=2k+(2n_l+s_l-1)d+$$
$$d\sum_{l=1}^{m}s_l-s_l+\left(\sum_{r=1}^{m}n_r+\sum_{l=l+1}^{m}n_l-n_l\right)d+$$
$$d\sum_{l=1}^{l-1}n_l=2k+\left(2\sum_{r=1}^{m}n_r+\sum_{l=1}^{m}s_l-1\right)d$$

对边 $x_{l+1,1}y_{l,1}\in E(H)$，$l\in[1,m-1]$，有

$$g(x_{l+1,1})+g(x_{l+1,1}y_{l,1})+g(y_{l,1})=$$
$$g_{l+1}(x_{l+1,1})+d\sum_{l=1}^{l}s_l+k+$$

$$\left(2\sum_{r=1}^{m} n_r - \sum_{l=1}^{l} n_l - 1\right)d + g_l(y_{l,1}) + d\sum_{l=1}^{l-1} n_l + d\sum_{l=l+1}^{m} s_l =$$
$$d + d\sum_{l=1}^{l} s_l + k + \left(2\sum_{r=1}^{m} n_r - \sum_{l=1}^{l} n_l - 1\right)d + k + (n_l - 1)d + d\sum_{l=1}^{l-1} n_l + d\sum_{l=l+1}^{m} s_l =$$
$$2k + \left(2\sum_{r=1}^{m} n_r + \sum_{l=1}^{m} s_l - 1\right)d$$

从而，对每一条边 $xy \in E(H)$，总有 $g(x) + g(xy) + g(y) = 2k + \left(2\sum_{r=1}^{m} n_r + \sum_{l=1}^{m} s_l - 1\right)d$。所以，标号 g 是树 H 的一个 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号。本定理得证。

观察图 2 中的例子，不难发现，有多种方法可以将树 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ “串联”在一起，从而构成较大规模的具有 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号的树。

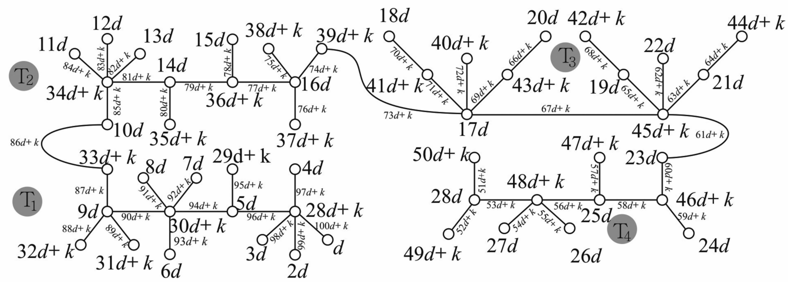

图 2 解释定理 1 的例子，其中树 H 的一个 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号

Fig. 2 A super (k,d) – edge magic total labelling of the tree H for illustrating Theorem 1

定理 2 设树 $H_1, H_2, \cdots, H_{|V(T)|}$ 均具有 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号，且它们的最大独立集的顶点标号均相同，树 T 是集有序优美树，且其顶点集二部划分 (X, Y) 满足 $\big||X| - |Y|\big| \leqslant 1$，则对称树 $G^* = \langle H_1, H_2, \cdots, H_{|V(T)|}\rangle$ 具有 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号。

证明 根据定理假设，树 T 是 p 个顶点的集有序优美树，其顶点集二部划分为 (X, Y)，其中 $\big||X| - |Y|\big| \leqslant 1$，$X = \{w_1, w_2, \cdots, w_l\}$，$Y = \{w_{l+1}, w_{l+2}, \cdots, w_p\}$，且 T 有一个集有序优美标号 f，使得

$$f(w_i) = i - 1, (i \in [1, p]); f(w_i w_j) = |i - j|, (i \in [1, p-1]), \text{且} f(X) < f(Y)$$

注意到，每一棵树 H_i 有一个 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号 g_i，使得

$$g_i(u_1) < g_i(u_2) < \cdots < g_i(u_s) < g_i(v_1) < g_i(v_2) < \cdots < g_i(v_t), s_i + t_i = n_i$$

其中 $g_i(u_i) \in X_i$，$g_i(v_j) \in Y_i$，(X_i, Y_i) 为 $V(H_i)$ 的二部划分。显然有

$$g_i(V(H_i)) = [d, s_i d]^d \cup [k + s_i d, k + (n-1)d]^d,$$
$$g_i(E(H_i)) = [k + n_i d, k + 2(n_i - 2)d]^d,$$

以及 $g_i(u_i) + g_i(u_i v_j) + g_i(v_j) = 2k + (2n_i + s_i - 1)d$，$i \in [1, p]$

根据定理的假设，所有树 $H_i(i \in [1, p])$ 的最大独立集的顶点标号均相同，故可设树 H_0 有一个 (k,d) – 超级集有序边魔幻全标号 g_0，使得

$$g_0(u_1) < g_0(u_1) < \cdots < g_0(u_s) < g_0(v_1) < g_i(v_2) < \cdots < g_0(v_t), s + t = n$$

其中 $g_0(u_i) \in X_0$，$g_0(v_j) \in Y_0$，且 (X_0, Y_0) 为 $V(H_0)$ 的二部划分。同时满足 $g_0(u_i) = g_l(u_i)$，$g_0(v_j) = g_l(v_j)$ $i \in [1, s]$，$j \in [1, t]$，$l \in [1, p]$。显然，$g_0(V(H_0)) = [d, s_i d]^d \cup [k + s_i d, k + (n-1)d]^d$，$g_0(E(H_0)) = [k + nd, k + 2(n-2)d]^d$，以及

$$g_0(u_i) + g_0(u_i v_j) + g_0(v_j) = g_0(u_1) + g_0(u_1 v_1) + g_0(v_1) = g_0(u_1) + g_0(v_1) + k + (2n-2)d = 2k + (2n + s - 1)d$$

利用 f 定义 T 的一个标号 f' 为：

$$f'(w_i) = f(w_i) + 1, i \in [1, p]; f^e(w_i w_j) = k + nd(|f(w_i) - f(w_j)| + p) - d$$

接下来，按照 p 的奇偶性，我们分别来找到对称树 G^* 的一个标号 g。

情形 1 当 $p = 2\beta$ 时，从而有 $\big||X| - |Y|\big| = 0$。令 $\lambda = 5nd\beta + 2k - d$。定义对称树 G^* 的标号 g 如下：

（**v**）当 $l \in [1, \beta]$ 时，令 $g(u_{l,i}) = nd(l-1) + g_0(u_i)$，$i \in [1, s]$；$g(v_{l,j}) = k + nd(\beta + l - 1) + g_0(v_j) - g_0(v_1)$，$j \in [1, t]$；对边 $u_{l,i}v_{l,j} \in E(G^*)$，令 $g(u_{l,i}v_{l,j}) = g_0(u_i v_j) + 2nd(2\beta - l)$。

（**vi**）当 $l \in [\beta+1, 2\beta]$ 时，令 $g(u_{l,i}) = k + nd(3\beta+1-l) + g_0(u_i) - (s+1)d$, $i \in [1, s]$; $g(v_{l,j}) = nd(2\beta - l) + g_0(v_j) - k + d$, $j \in [1, t]$; 对边 $u_{l,i}v_{l,j} \in E(G^*)$，令 $g(u_{l,i}v_{l,j}) = nd(2l-3) + g_0(u_iv_j)$。

下面证明标号 g 是树 G^* 的 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号。当 $l \in [1, \beta]$, $i \in [1, s]$ 和 $j \in [1, t]$ 时，H_l 的每一条边 $u_{l,i}v_{l,j}$ 满足

$$\begin{gathered} g(u_{l,i}) + g(u_{l,i}v_{l,j}) + g(v_{l,j}) = \\ nd(l-1) + g_0(u_i) + k + \\ nd(\beta+l-1) + g_0(v_j) - g_0(v_1) + g_0(u_iv_j) + \\ 2nd(2\beta - l) = nd(5\beta-2) + k - g_0(v_1) + \\ [2k + (2n+s-1)d] = \\ nd(5\beta-2) + k - (k+sd) + \\ [2k+(2n+s-1)d] = 5nd\beta + 2k - d = \lambda \end{gathered}$$

当 $l \in [\beta+1, 2\beta]$, $i \in [1, s]$ 和 $j \in [1, t]$ 时，H_l 的每一条边 $u_{l,i}v_{l,j}$ 满足

$$\begin{gathered} g(u_{l,i}) + g(u_{l,i}v_{l,j}) + g(v_{l,j}) = \\ k + nd(3\beta+1-l) + g_0(u_i) - \\ (s+1)d + nd(2\beta-l) + g_0(v_j) - \\ k + d + nd(2l-3) + g_0(u_iv_j) = \\ nd(3\beta+1-l+2l-1+2\beta-l) - d + 2k = \\ 5nd\beta + 2k - d = \lambda \end{gathered}$$

因为，当 $l \in [1, 2\beta]$, $i \in [1, s]$, 以及 $j \in [1, t]$ 时，$g(u_{l,i}) + g(u_{l,i}v_{l,j}) + g(v_{l,j}) = \lambda$。故，$g$ 是 H_l $(l \in [1, 2\beta])$ 的一个使得 $g(u_{l,i}) + g(u_{l,i}v_{l,j}) + g(v_{l,j}) = \lambda$ 的标号。

不难发现，树 T 和树 H 的重合顶点具有任意性。对于树 T 和树 $H_i(i \in [1, p])$ 的重合顶点来说，当 H_l 的顶点 $u_{l,i}$ 与树 T 的顶点 w_l 重合时，用 $g(u_{l,i})$ 来替换 $f'(w_l)$；H_{p-l} 的顶点 $u_{p-l,s+1-i}$ 与树 T 的顶点 w_{p-l} 重合时 $(l \in [1, \beta])$，用 $g(u_{p-l,i})$ 来替换 $f'(w_{p-l,i})(i \in [1, s])$，然后定义 $g(w_iw_j) = f'(w_iw_j)$, $w_iw_j \in E(T)$。另一方面，当 $l \in [1, \beta]$，树 H_l 的顶点 $v_{l,j}$ 与树 T 的顶点 w_l 重合时，用 $g(v_{l,j})$ 来替换 $f'(w_l)$，H_{p-l} 的顶点 $v_{p-l,t+1-j}$ 与树 T 的顶点 w_{p-l} 重合时，用 $g(v_{p-l,j})$ 来替换 $f((w_{p-l,j})$, $j \in [1, t]$；最后定义 $g(w_iw_j) = f((w_iw_j)$, $w_iw_j \in E(T)$。至此，对称树 G^* 的标号 g 已经全部给出。

考察对称树 G^* 的边 w_iw_j 的标号，得到

$$\begin{gathered} f'(w_i) + f'(w_iw_j) + f'(w_j) = \\ g(u_{i,l}) + g(w_iw_j) + g(u_{j,s+1-l}) = \\ nd(i-1) + g_0(u_l) + k + \\ nd(|f(w_i) - f(w_j)| + p) - \\ d + k + nd(3\beta+1-j) + g_0(u_{s+1-l}) - (s+1)d = \\ nd(i+j-i+5\beta-j) + 2k - d = \\ 5nd\beta + 2k - d = \lambda,\ l \in [1, s]; \\ f'(w_i) + f'(w_iw_j) + f'(w_j) = \\ g(v_{i,l}) + g(w_iw_j) + g(v_{j,t+1-l}) = \\ k + nd(\beta+i-1) + g_0(v_l) - g_0(v_1) + \\ k + nd(|f(w_i) - f(w_j)| + p) - d + \\ nd(2\beta - j) + g_0(v_{t+1-l}) - k + d = \\ nd(\beta+i-1+j-i+2\beta+2\beta-j) + \\ g_0(v_l) - sd + g_0(v_{t+1-l}) = \\ nd(5\beta-1) + k + (s+l-1)d - \\ sd + k + (s+t-l)d = \\ nd(5\beta-1) + 2k + (l-1)d + (n-l)d = \\ 5nd\beta + 2k - d = \lambda,\ l \in [1, t] \end{gathered}$$

综合上述推理，可知对称树 G^* 的顶点二部划分 (X^*, Y^*) 满足 $g(X^*) < g(Y^*)$，其中

$$\begin{gathered} g(X^*) = \{g(u_{l,i}) \mid l \in [1, \beta], \\ i \in [1, s]\} \cup \{g(v_{l,j}) \mid l \in [\beta+1, 2\beta], \\ j \in [1, t]\}, \\ g(Y^*) = \{g(u_{l,i}) \mid l \in [\beta+1, 2\beta], \\ i \in [1, s]\} \cup \{g(v_{l,j}) \mid l \in [1, \beta], j \in [1, t]\}. \end{gathered}$$

边标号集合 $g(E(G^*)) = [k + 2nd\beta, k + 4nd\beta - 1]$。此时，已经得到：

（**vii**）对每一条边 $u_{l,i}v_{l,j} \in E(G^*)$, $l \in [1, 2\beta+1]$, $i \in [1, s]$, $j \in [1, t]$，有 $g(u_{l,i}) + g(u_{l,i}v_{l,j}) + g(v_{l,j}) = \lambda$；

（**viii**）对树 T 的每一条边 w_iw_j, $i \in [1, \beta]$, $j \in [\beta+1, 2\beta]$，有 $f'(w_i) + f'(w_iw_j) + f'(w_j) = \lambda$。故当 p 为偶数时，标号 g 是对称树 G^* 的 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号。

情形 2　$p = 2\beta+1$，则有 $\big| |X| - |Y| \big| = 1$。令 $\mu = 2k + (5\beta+2)nd + (s-1)d$。定义 G^* 的一个标号 g 如下：

（**ix**）当 $l \in [1, \beta+1]$ 时，令 $g(u_{l,i}) = nd(l-1) + g_0(u_i)$, $i \in [1, s]$; $g(v_{l,j}) = nd(\beta+l-1) + g_0(v_j)$, $j \in [1, t]$; 对边 $u_{l,i}v_{l,j} \in E(G^*)$，令 $g(u_{l,i}v_{l,j}) = 2nd(2\beta+1-l) + g_0(u_iv_j)$。

（**x**）当 $l \in [\beta+2, 2\beta+1]$ 时，令 $g(u_{l,i}) = k + nd(3\beta+2-l) - d + g_0(u_i)$, $i \in [1,s]$; $g(v_{l,j}) = nd(2\beta+1-l) + d + g_0(v_j)(k, j \in [1,t]$; 对边 $u_{l,i}v_{l,j} \in E(G^*)$，令 $g(u_{l,i}v_{l,j}) = nd(2l-3) + g_0(u_iv_j)$。

证明的其余部分完全类似于情形 1，故不再赘述。综合情形 1 和情形 2 的论证，定理得证。

图 3 和图 4 中给出了说明定理 2 的一个例子。

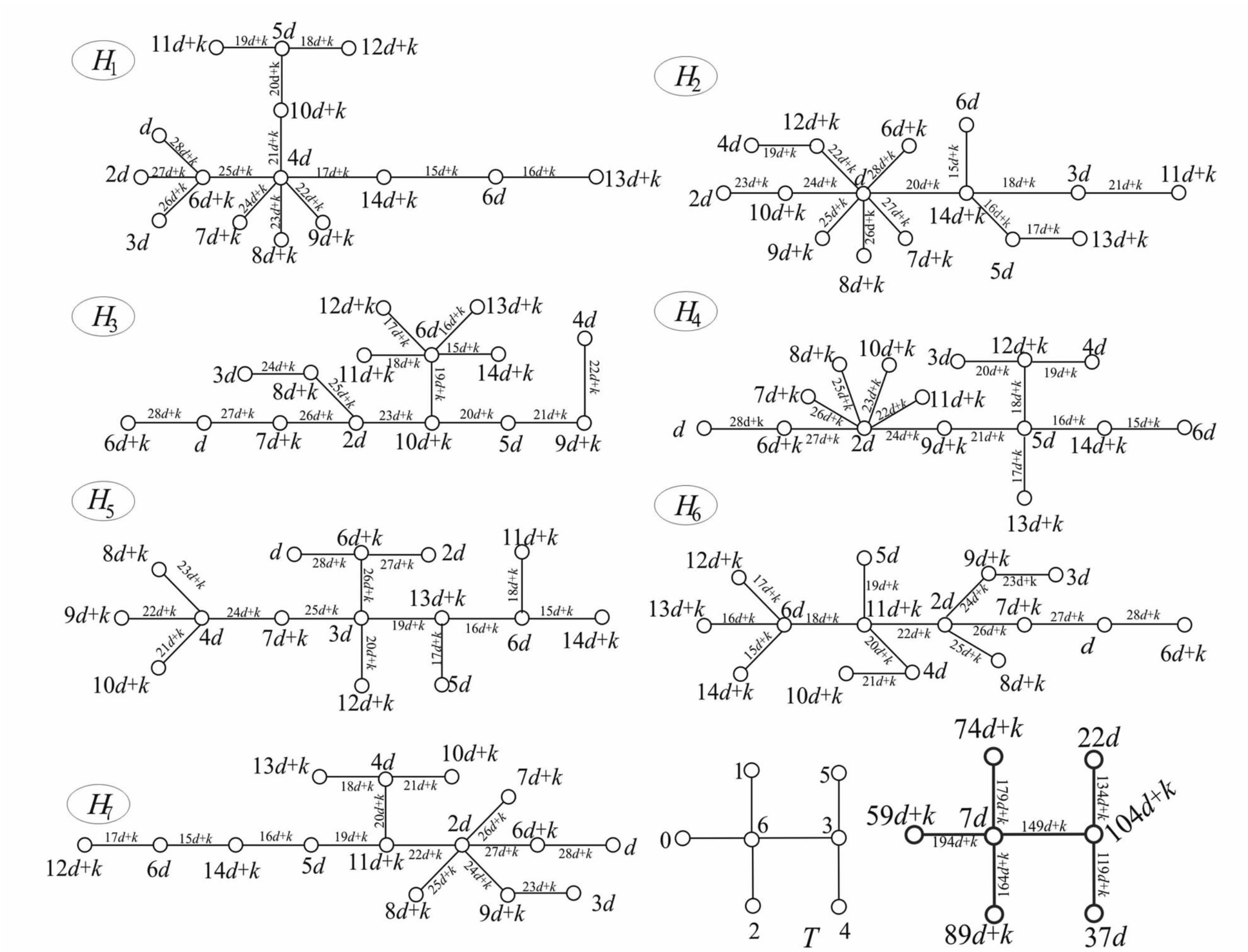

图 3 (k,d) - 优美树 H_1, …, H_7 和集有序优美树 T

Fig. 3 (k,d) - graceful trees H_1, …, H_7 and set - ordered graceful tree T

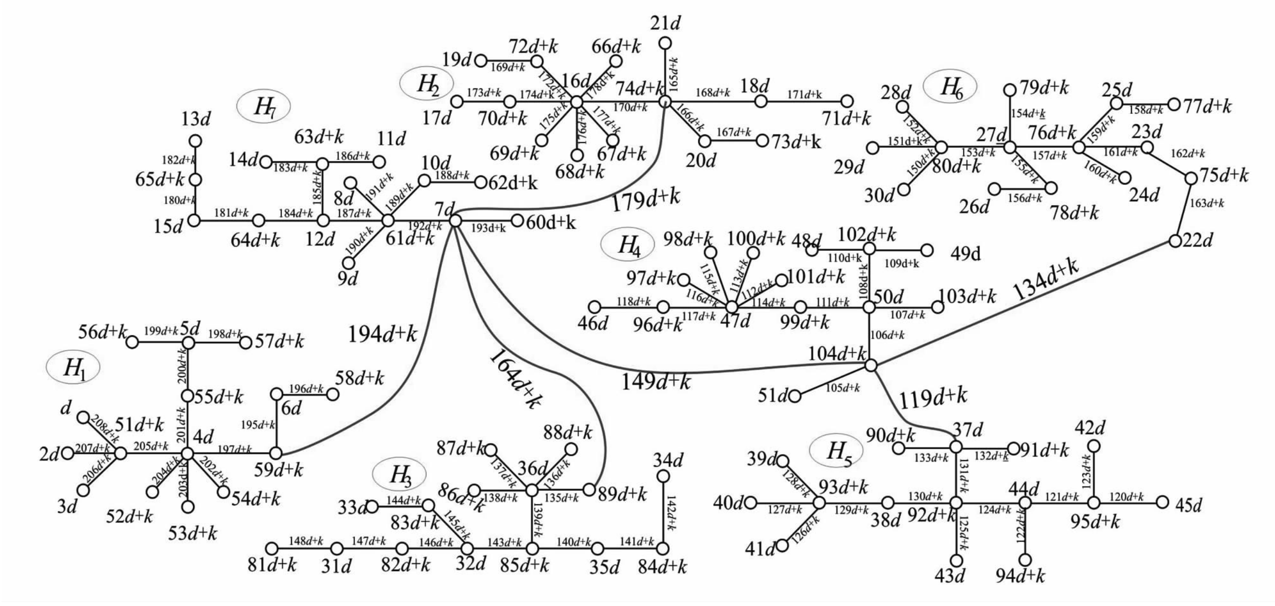

图 4 对称树 $[T;H_1,H_2,\cdots,H_{|V(T)|}]$

Fig. 4 A symmetric tree $[T;H_1,H_2,\cdots,H_{|V(T)|}]$

推论 1　设树 H 有 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号，树 T 是集有序优美树，且其顶点集二部划分 (X, Y) 满足 $||X|-|Y|| \leqslant 1$，则对称树 $<T; H>$ 具有 (k,d) - 超级集有序边魔幻全标号。

参考文献：

[1] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E. Every lobster is odd-elegant [J]. Information Processing Letters, 2013, 113 (1/2): 30 - 33.

[2] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J/OL]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2015, DS6. http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/DS6/pdf.

[3] BACA M, BERTAULT F, MACDOUGALL J A, et al. Vertex-antimagic total labelings of graphs [J]. Discuss. Math Graph Theory, 2003, 23(1): 67 - 83.

[4] 唐保祥，任韩. 2 类优美图的冠的优美标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(5): 24 - 27.

[5] 魏丽侠，张坤龙. 几类并图的优美性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2008, 47(3): 10 - 13.

[6] 吴跃生. 图 $F_{n,4}(r_1, r_2, \cdots, r_{3n+1})$ 的交错标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 11 - 14.

[7] YAO B, CHENG H, YAO M, et al. A note on strongly graceful trees [J]. Ars Combinatoria, 2009, 92: 155 - 169.

[8] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. Ars Combinatoria, 2012, 103: 13 - 18.

[9] WANG H Y, YAO B, YAO M. Generalized edge-magic total labellings of models from reseaching networks [J]. Information Sciences, 2014, 279: 460 - 467. DOI:10.1016/j.ins.2014.03.132.

[10] WANG H Y, YAO B, YANG C, et al. Edge-magic total labellings of some network models [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 347 - 350: 2752 - 2757. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.347 - 350.2752.

[11] WANG H Y, YAO B, YANG C, et al. Labelling properties of models related with complex networks based on constructible structures [J]. Advanced Materials Research, 2013 (765/766/767): 1118 - 1123. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.765/766/767.1118.

[12] 赵喜杨，马飞，姚兵. 一类强优美标号树[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(2): 222 - 228.

(上接第 66 页)

[4] ZHAN Q, XU S S, ZHANG Y H. Asymptotic property of approximation to $x^{\alpha}\mathrm{sgn}x$ by Newman type operators [J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2010, 26(4): 617 - 624.

[5] 詹倩，许树声. 基于一类新结点集的 Newman 型有理插值算子[J]. 数学进展, 2015, 44(5): 757 - 764.

[6] WERNER H. Rational interpolation von $|x|$ in äquidistanten Punkten [J]. Math Z, 1982, 180: 11 - 17.

[7] BRUTMAN L, PASSOW E. Rational interpolation to $|x|$ at the Chebyshev nodes [J]. Bull Austral Math Soc, 1997, 56: 81 - 86.

[8] BRUTMAN L. On rational interpolation to $|x|$ at adjusted Chebyshev nodes [J]. J Approx Theory, 1998, 95: 146 - 152.

[9] HAN X L. On the order of approximation for the rational interpolation to $|x|$ [J]. Approximation Theory and Its Applications, 2002, 18(2): 58 - 64.

[10] 张慧明，李建俊. $|x|$ 在第二类 Chebyshev 结点的有理逼近[J]. 郑州大学学报(理学版), 2010, 42(2): 1 - 3.

[11] ZHU L Y, DONG Z L. On Newman-type rational interpolation to $|x|$ at the Chebyshev nodes of the second kind [J]. Analysis in Theory and Applications, 2006, 22(3): 262 - 270.

[12] 张慧明，李建俊，段继光. $|x|$ 在调整的第二类 Chebyshev 结点组的有理插值[J]. 数学杂志, 2014, 34 (3): 509 - 514.

[13] 张慧明，门玉梅，李建俊. $|x|$ 在正切结点组的有理插值[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2011, 31 (4): 5 - 6.

[14] 张慧明，段生贵，李建俊，等. $|x|$ 的有理插值[J]. 高等学校计算数学学报, 2016, 38(1): 52 - 59.

[15] 张慧明，李建俊. $|x|^{\alpha}$ 在 Chebyshev 结点的有理插值[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, 33(4): 491 - 495.

[16] 张慧明，段生贵，李建俊. $|x|^{\alpha}$ 在第二类 Chebyshev 结点的有理插值[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2015, 38(6): 889 - 892.

[17] 张慧明，段生贵，李建俊. $|x|^{\alpha}$ $(1 \leqslant \alpha < 2)$ 在等距结点的有理插值[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2016, 50(1): 21 - 23.